BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННЫМ ПОЛИНОМАМ ФАБЕРА

М.А.ТАГИЕВА

Бакинский Государственный Университет

В работе приведены некоторые достаточные условия равномерной сходимости рядов по обобщенным (в смысле Векуа) полиномам Фабера внутри области.

Пусть на комплексной плоскости (Z) дана конечная односвязная область G, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ, причем дополнение замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ есть односвязная область D, содержащая точку $z = \infty$. Пусть $\omega = \Phi(z)$ – функция, конформно и однолистно отображающая область D на область $\{|\omega| > 1\}$ при условии $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = \alpha > 0$, $z = \psi(\omega)$ – обратная функция; Γ_R – прообраз окружности $\{|\omega| = R\}$ при отображении $\omega = \Phi(z)$, G_R – область, лежащая внутри Γ_R, D_R - область, лежащая вне Γ_R.

Пусть $\{c_k\}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\ell = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R} < 1 \tag{1}$$

и $\{\varphi_k(z)\}$ – последовательность полиномов Фабера для области G. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=o}^{\infty} c_k \varphi_k(z). \tag{2}$$

Известно [1], что ряд (2) сходится равномерно внутри области G_R (на каждом компакте $F \subset G_R$).

Ряду (2) сопоставим ряд по обобщенным полиномам Фабера для области G_R [2]:

$$\sum_{k=o}^{\infty} c_{2k} \Phi_{2k}(z, G_R) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, G_R), \tag{3}$$

где

$$\Phi_{2k}(z,\, G_R)=K(\varphi_k(z),\, G_R)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\Omega_1(z,t,G_R)\varphi_k(t)dt-\Omega_2(z,t,G_R)\overline{\varphi_k(t)}\,\overline{dt}, \quad (4)$$

$$\Phi_{2k+1}(z,\, G_R)=K(i\varphi_k(z),\, G_R)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\Omega_1(z,t,G_R)i\varphi_k(t)dt-\Omega_2(z,t,G_R)\overline{i\varphi_k(t)dt} \quad (5)$$

(ядра $\Omega_1(z,t,G_R)$, $\Omega_2(z,t,G_R)\in U_{p,2}(A,B,G)$, $p>2$, нормированы относительно области G_R [3]), $c_k=c_{2k}+ic_{2k+1}$ удовлетворяют условию (1).

Справедлива

Теорема 1. Ряд (3) сходится равномерно внутри области G_R.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi_{n,p}(z,G_R)=\sum_{k=n}^{n+p}c_{2k}\Phi_{2k}(z,G_R)+c_{2k+1}\Phi_{2k+1}(z,G_R), \quad (6)$$

$$\varphi_{n,p}(z)=\sum_{k=n}^{n+p}(c_{2k}+ic_{2k+1})\varphi_k(z). \quad (7)$$

В силу равномерной сходимости ряда (2) внутри области G_R, $\varphi_{n,p}(z)\to 0$ равномерно внутри области G_R. Покажем, что и $\Phi_{n,p}(z)\to 0$ равномерно внутри области G_R.

Пусть A_n, B_n – функции, совпадающие с А и В в области G_{Rn} и равные нулю вне его, где $R_n=\frac{n}{n+1}R$, $1<R_n<R$. Пусть G' – замкнутое подмножество области G_R. Тогда существует такое натуральное число n_0, что при $n>n_0$ множество G' принадлежит всем G_{Rn}. Пусть G'' – замкнутое множество, не пересекающееся с G'. В таком случае, последовательности ядер $\Omega_{jn}(z,\varsigma,G_R)\equiv\Omega_j(z,\varsigma,G_{Rn})$ $(j=1,2)$ уравнения $\partial_{\bar z}w+A_nw+B_nw=0$ равномерно сходятся к ядрам $\Omega_j(z,\varsigma,G_R)$ $(j=1,2)$ уравнения $\partial_{\bar z}w+Aw+B\overline{w}=0$ [3] относительно обоих аргументов z *и* ς, если $z\in G'$, *а* $\varsigma\in G''$. Поэтому, учитывая равенства (4) и (5), формулу (6) представим в виде

$$\Phi_{n,p}(z,G_R)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\Omega_1(z,\varsigma,G_R)\varphi_{n,p}(\varsigma)d\varsigma-\Omega_2(z,\varsigma,G_R)\overline{\varphi_{n,p}(\varsigma)d\varsigma}=$$

$$(8)$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\Omega_1(z,\varsigma,G_{Rm})\varphi_{n,p}(\varsigma)d\varsigma-\Omega_2(z,\varsigma,G_{Rm})\overline{\varphi_{n,p}(\varsigma)d\varsigma},$$

где $\varphi_{n,p}(z)$ определена равенством (7) и $\Gamma_m = \partial G_{Rm}$.

Из принципа максимального модуля для обобщенных аналитических функций [3] следует, что существует положительная постоянная М и точка $\hat{z}$ на кривой Γ_{n_0} такие, что

$$\max_{z\in G'}\left|\Phi_{n,p}(z,G_R)\right| \le M\left|\Phi_{n,p}(\hat{z},G_R)\right|. \tag{9}$$

Оценим теперь правую часть равенства (8) в точке $z=\hat{z}$. Имеем

$$\left|\Phi_{n,p}(\hat{z},G_R)\right| \le \frac{1}{2\pi}\overline{\lim_{m\to\infty}}\int_{\Gamma_m}\left(\left|\Omega_1(\hat{z},\varsigma,G_{Rm})\right|+\left|\Omega_2(\hat{z},\varsigma,G_{Rm})\right|\right)\cdot\left|\varphi_{n,p}(\varsigma)\right|\left|d\varsigma\right|.$$

Поэтому можно указать такое натуральное число $m_0 > n_0$, что в силу (9), будем иметь неравенство

$$\max_{z\in G'}\left|\Phi_{n,p}(z,)\right| \le \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_{m_0}}\left(\left|\Omega_{1m_0}(\hat{z},\varsigma,G_R)\right|+\left|\Omega_{2m_0}(\hat{z},\varsigma,G_R)\right|\right)\cdot\left|\varphi_{n,p}(\varsigma)\right|\left|d\varsigma\right|. \tag{10}$$

Так как ряд (2) сходится равномерно внутри области G_R, то $\varphi_{n,p}(\varsigma)\to 0$ равномерно на Γ_{m_0}, но тогда из оценки (10) следует, что и $\Phi_{n,p}(z)\to 0$ равномерно на G'. Теорема доказана.

Замечание. В случае круга $G=\{|z-z_0|<R\}$ система обобщенных полиномов Фабера $\{\Phi_k(z,G_R)\}$ суть система обобщенных степеней $\{w_k(z,z_0,R)\}$, и теорема 1 – результат И.Н.Векуа о равномерной сходимости ряда по обобщенным степеням внутри круга сходимости ряда по обычным степеням $(z-z_0)^k$ $(k=0,1,2,...)$.

Теорема 1 остается справедливой, если $\ell=1,\ R=1,$ но кривая Г- правильная аналитическая кривая. В этом случае отображающая функция $\omega=\Phi(z)$ аналитически и однолистно продолжается в область $G_{\rho_0},\ \rho_0<1,$ и ряд (3) сходится равномерно внутри области $G_\rho,\quad \rho_0<\rho<1,\quad \rho=\frac{1}{\ell}.$

Рассмотрим теперь случай, когда $\ell=1,\ R=1,$ *а* граница Г области G не является правильной аналитической кривой. Обозначим через $H_\delta,\ \delta>0,$ класс функций, голоморфных в круге $\{|z|<1\}$ и таких, что

$$\ell im_{n\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\delta} d\theta = H_{\delta}(f) < \infty.$$

Справедлива

Теорема 2. Если граница Г области G такова, что $\psi^{(p+2)}(t) \in H_1$, *а* последовательность коэффициентов $\{c_k\}$ ряда (3) удовлетворяет условию

$$c_k = O\left(k^p\right), \qquad (11)$$

то ряд (3) сходится равномерно внутри области G.

Доказательство. При выполнении условий теоремы ряд (2) с коэффициентами c_k, удовлетворяющими условию (11), сходится равномерно внутри области G [1]. Построим компактное исчерпывание области G односвязными областями G_n, $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, с достаточно гладкими границами. Повторяя рассуждения теоремы 1, получим утверждение теоремы.

В частности, если Г- спрямляемая кривая, то ряд (3) сходится равномерно внутри области G при условии $c_k = 0\left(1/k\right)$.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. Если граница Г области G такова, что $\psi'(\omega) \in H_{\delta}$, $1 < \delta \le 2$, *а* последовательность $\{c_k\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|c_k\right|^{\delta} < \infty,$$

то ряд (3) сходится равномерно внутри области G.

Теорема 4. Если выполняется условие

$$c_k = 0\left(1/k^{\alpha}\right), \quad 1/2 < \alpha \le 1,$$

а кривая Г такова, что $\psi'(\omega) \in H_{\delta}$, $\delta = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$, причем $\varepsilon > 0$ *и* $1 < \delta \le 2$, то ряд (3) сходится равномерно внутри области G.

Теорема 5. Если $c_k = 0(k^{\beta})$, *где* $0 \le \beta < \frac{1}{2}$, *а* кривая Г такова, что $\psi''(\omega) \in H_{\delta}$, *где* $\delta = \frac{1}{1-\beta} + \varepsilon$, причем $\varepsilon > 0$ и выбрано так, что $1 < \delta \le 2$, то ряд (3) сходится равномерно внутри области G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. Наука, 1984 г.
2. Исмаилов А.Я. О равномерных приближениях обобщенных аналитических функций в замкнутой области. Ученые записки АГУ, сер. физ.-мат. наук, 1977, №3, с. 69-73.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. Наука, 1988г.

ÜMUMİLƏŞMİŞ FABER ÇOXHƏDLİLƏRİ ÜZRƏ SIRALARIN YIĞILMASI HAQQINDA

M.Ə.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə oblast daxilində ümumiləşmiş (Vekua mənada) Faber çoxhədliləri üzrə sıraların müntəzəm yığılması üçün bəzi kafi şərtlər verilmişdir.

ON A CONVERGENCE OF A SERIES BY FABER`S GENERALIZED POLYNOMIALS

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

Some sufficient conditions, at which a series by Faber`s generalized polynomials uniformly converging inside domain, are obtained in the paper.